フラクタル示強変数と臨界状態法 : 2次元260万、3次元26万までの対称TSP解の公開実験(基研研究会「統計物理の展望」,研究会報告)

フラクタル示強変数と臨界状態法
―２次元２６０万、３次元２６万までの対称ＴＳＰ解の公開実験―

東海大学工学部　　真山　紀

巡回セールス員問題（Traveling Sales*person* Problems ; TSPs）は簡潔で開かれた基礎的問題として知られ、組合せ最適化の分野で中心に位置し、スピングラスでの最小エネルギ探索など科学的問題と深く関連している。

物理学で取り扱われてきたＴＳＰやこれに対応づけられる問題は、与えられる点座標（都市座標）に対して、対称ＴＳＰで距離が直線で定義される場合（Euclid距離）に属する。ここで対称とは、２都市たとえばＡとＢで、ＡＢとＢＡの距離が等しいことを表わし、都市分布の対称性を意味しない。

最難関なＴＳＰのクラスは、対称ＴＳＰで多数の都市が（都市間の距離について）一様分布性を含む場合と考えられている。臨界状態法（Critical State Method ; CriSt Method）は、このクラスを含めて、与えられる都市座標からなる対称ＴＳＰに対して、最高速で必ず解（閉順路）を導く決定論的な設定法である（この手法はManhattan距離にも適用しうる）。CriSt法の高い有効性は、熱・統計物理学（Thermal, Statistical Physics ; TSPhys）との関連を含めて、フラクタル示強変数という新しい概念の獲得とともに明らかにされつつある。これに関しては、Usami（宇佐見）他の方法（ポリゴン描画法）への評価を含めて、（本年度を除く）95年春から続く本学会講演概要集での報告などを参照していただきたい。

つぎに、CriSt法の特徴をいくつか示す。

①都市座標の入力から総距離の導出まで処理時間はｎ都市に対してオーダーｎ（O(n)）（O(n)のクラスでも最速）。　②この処理時間は都市分布にほとんど依存しない。　③与えられた都市数に対する実際の処理時間を予測可能。　④いかなる都市数・分布に対しても同一のアルゴリズムでよい。　⑤いかなる都市数・分布に対しても必ず解を導出する。⑥数値処理における標準について：(a) 都市座標・都市間距離の整数性に依存しない（実際的な問題に対応可能）。(b) 都市座標は10000より大きい数値でよい。　⑦精度はステージ数により調整可能。　⑧設定法として精度は高い。　⑨$４^{n}$都市などの強磁性スピン基底状態型の分布に対して最適解を導出する（Manhattan距離での最適解にもなる）。　⑩$４^{n}/２$都市などの反強磁性スピン基底状態型の分布に対して最適解か準最適解を導出する。⑪特定のハードやソフトシステムによらずパソコンレベルで処理が可能。　⑫低価格なパーソナル性が可能。　⑬問題に対する新しいパラメータの導入が必要ない（10000より大きい座標値の場合は全都市を含む正方領域の一辺の長さを設定）。　⑭都市間に障壁が存在しても解を導出可能。　⑮多次元の問題に拡張可能。　⑯アルゴリズムは完全並列性となっている。　⑰データの前処理（あらかじめの準備）が必要ない。　⑱類似な都市数および分布に対して解はロバスト性をもつ。　⑲同一の都市数および分布に対して解は一意性をもつ。

なお、CriSt法の特徴を保存して最速で精度を高めるための決定論的な、いくつかの初期値設定法と、２-Optおよび３-Optの改善法とが新しく開発されている。

以下に、CriSt法による結果のいくつかを示す。これらは①などの実証にもなる。

東芝DynaBook Tecra720CT(Pentium133MHz, メモリ80MB);Widows95;Turbo C++ 5.0Jで、４^{n}都市まで４^{n}セルを用い、都市座標を与える乱数生成から閉じた新Hilbert線（F1）による閉順路の総距離導出まですべてを含めて処理時間とし、clock()関数により計測した処理

時間の平均を求めた。なお、本報告の数値は少数第３位を四捨五入している。F1とその最速生成アルゴリズムは本研究室で開拓された。

図1.1に、２次元で１千都市から２５０万都市までの処理時間を示す。１千きざみで１万、１万きざみで１０万、１０万きざみで１００万、さらに５０万きざみで２５０万までの各都市にrandom(10000)関数を用いて座標を与えた。各都市数ごとに、９千都市まで５０回、５０万都市まで３０回、そして２５０万都市まで１０回、各処理時間を求めて平均を得た（千都市程度までは0.00秒）。２千都市（平均0.01秒）から９千都市（平均0.40秒）まで各都市数での各処理時間はばらついたが、平均時間は線形的に増加した。１万都市（平均0.59秒：境界値）以上の各都市数では各処理時間のばらつきは少なく、安定に線形増加した(O(n))。以上の性質は、領域を定義して単純に加算をｍ回くり返す演算（O(m)が既知）を用いて、ワークステーションや各種のパソコンでも確認された。２６０万都市以上で各処理時間は急に増大し、ばらつく。この都市数はパソコン環境に現れる特性値で、たとえば同Tecra530CDT (MMX Pentium166MHz, メモリ96MB)の場合、３００万都市にも安定に線形増加する。**図1.2**に、Ａ分布（random(10000)関数の場合）とＢ分布（random(10240)関数の場合）とを重ねて描いた。Ｂ分布にもＡ分布での現象は再現された。**図2**に、３次元で１万都市から２６万都市までの処理時間を示す。ここにa分布はrandom(10000)関数の場合、b分布は各都市数ごとにsrand() 関数で乱数初期値つまり乱数系列による都市分布を変化させる場合を表わす。F1はスライス型空間結合を用いた。３次元でも、分布によらず平均時間の線形的増加と境界値（0.60秒）や安定なO(n)は確認された。**図3**に、Euclid距離の対称ＴＳＰで人為的な都市分布の最適解が知られている最大のPLA7397に対する例を示す。９ステージで解は最適解の1.36倍、処理時間は都市座標の入力直後から計測して0.14秒を得る（たとえば上述の２-Optを5回、３-Optを12回作用するのみで最適解の1.28倍となる）。

本研究会でご討論をいただいた方々および貴重な資料をいただいた日立製作所の甲元洋氏に感謝の意を表します。

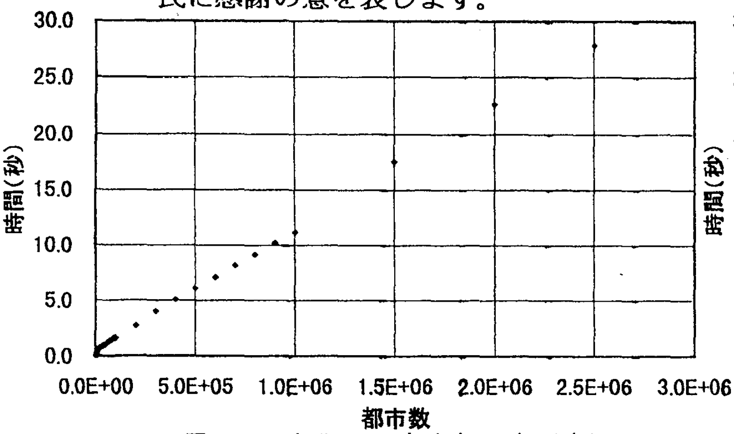

図１．１　2次元250万都市までの処理時間

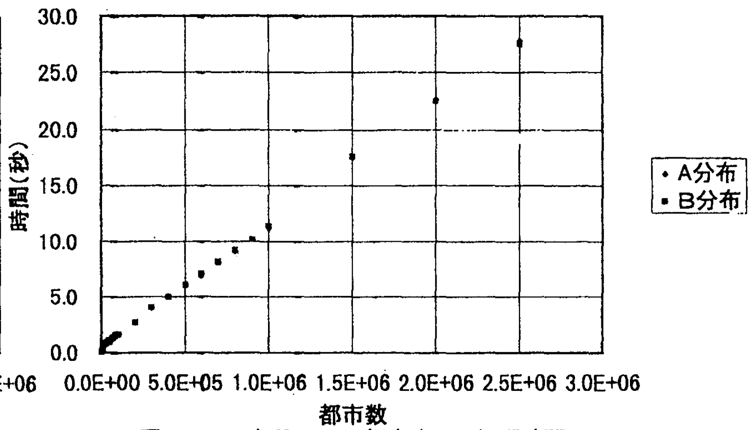

図１．２　2次元250万都市までの処理時間

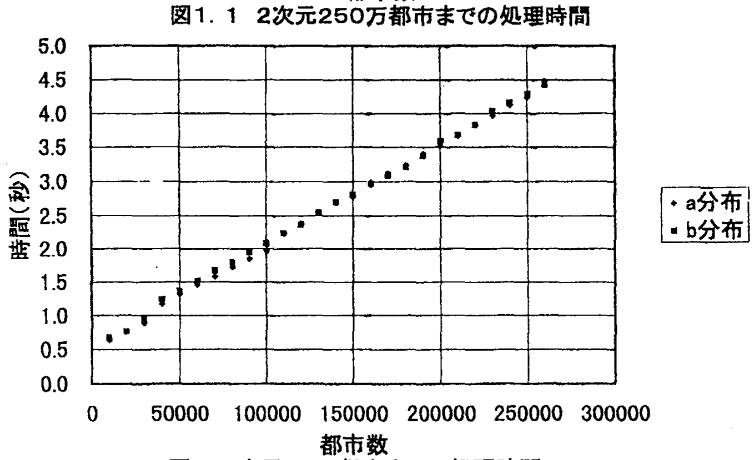

図2　3次元26万都市までの処理時間

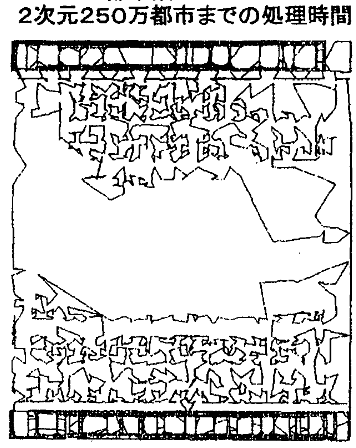
図3　PLA7397の9ステージでの解